90　多価群Dの正則表現に就いて

阪大学生　内海 勇蔵

（1948. Ⅱ. 24）

群を其の部分群で例へば左分解した時．出来た剰余類の同じ元の意味で乗法を定義しますと．其等の類の全体は群の普通の公理から積の一意性の要求だけを除いた公理を満足する所謂多価群を作りますが　斯かる方法で得られる多価群をKrasnerに従つて多価群Dとよぶことにしますと．一般な多価群が多価群Dなる為の條件を多価群の言葉で述べておくことは．多価群論と群論とを結び付ける上から意義的である様に思はれますが．Eatonが彼の所謂cogroupの公理を必要條件として挙げてゐる以外には．Krasner等も未成功の様に思はれます．茲では丁度Baerが混群に就いてやつたと全様なやり方でCayleyの定理（群の正則表現に関する）を多価群の場合に拡張することに依り．條件」の一つの形を得たいと思ひます．

群$\mathfrak{G}$の部分群$\mathfrak{H}$が$\mathfrak{G}$の自明でない正規部分群を含まないとして．$\mathfrak{G}$の$\mathfrak{H}$による左分解による多価群Dを$\mathfrak{M}$とし．$\mathfrak{G}$の$\mathfrak{H}$による可移表現$\begin{pmatrix}\mathfrak{H}a_i\\ \mathfrak{H}a_i x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{H}a_i\\ \mathfrak{H}a_{p_i}\end{pmatrix}$に対応する$\mathfrak{M}$の元の置換$\begin{pmatrix}\mathfrak{m}_i\\ \mathfrak{m}_{p_i}\end{pmatrix}=\varphi$の全体を$\Phi$とおき．特に$\mathfrak{M}$の単位元を$\mathfrak{m}_i$に移すものの全体を$\Phi_i$と書けば　Φは明かに

(1)　$\varphi\in\Phi,\ \mathfrak{m}_i<\mathfrak{m}_j\mathfrak{m}_k\rightarrow\mathfrak{m}_i^{\varphi}<\mathfrak{m}_j\mathfrak{m}_k^{\varphi}$

(2)　$\mathfrak{m}_i<\mathfrak{m}_j\mathfrak{m}_k\rightarrow\exists\varphi\in\Phi_k:\mathfrak{m}_j^{\varphi}=\mathfrak{m}_i$

なる2性質をもち．勿論$\mathfrak{G}\cong\Phi$，全く同様で$\mathfrak{H}\cong\Phi_0$　従つて左分解群$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$と

Φ/Φ_0（多価群として）ですが、逆に多価群Dの$\mathfrak{M}$の元の置換全体の作る半群の部分群Φで(1),(2)を満足するものをとれば$\Phi/\Phi_0 \cong \mathfrak{M}$で、$\Phi_0$は$\Phi$の正規部分群を含まない事を容易に知ります。即ち $m_i \subset m_i$ に(2)を用いて $\exists \varphi \in \Phi_i$, $\therefore \Phi_i \neq \phi$.

今Φ_iとm_iを対応させれば $\Phi_i \Phi_j \supset \Phi_k$ の時 $\exists \varphi_i \varphi_j = \varphi_k \ (\varphi_\nu \in \Phi_\nu)$ で $m_k = e^{\varphi_k} = e^{\varphi_i \varphi_j} = m_i^{\varphi_j} \subset m_i e^{\varphi_j} \ (\because m_i \subset m_i e) = m_i m_j$ ですが逆に $m_i m_j \supset m_k$ ならば(2)から $\exists \varphi_j \in \Phi_j : m_i^{\varphi_j} = m_k$ ですから $e^{\Phi_i \varphi_j} = m_i^{\varphi_j} = m_k$, $\Phi_i \varphi_j \subset \Phi_k$, $\Phi_i \Phi_j \supset \Phi_j$ です。

この多価群Dの主要な現れ方の更なる仮設として次の如き定義が可能になります

定義　集合$\mathfrak{M}$に多価乗法 $mm' = \{m''\}$ が、あらゆる$\mathfrak{M}$の2元m, m'に対し

$\{m''\} \neq \phi$ なる如く与へられてゐて、

(3)　$\exists e \in \mathfrak{M}$:　$me \supset m \subset me$.　$(\forall m \in \mathfrak{M})$

(4)　$c \subset ab$, $a \neq c$ なる任意の3元a, b, cに対し$\mathfrak{M}$の$\mathfrak{M}$の上の一々対応φで $m^\varphi \subset mb \ (\forall m \in \mathfrak{M})$, $a^\varphi = c$

$$m_i m_j \supset m_k \rightleftarrows m_i m_j^\varphi \supset m_k^\varphi \qquad (5)$$

を満足するものが有る。

なる2條件が満足されてゐる時$\mathfrak{M}$を多価群Dと云ふ。

尚(5)は $\{x \mid ax \supset b\} = b/a$ とかけば $m_i/m_j = m_i^\varphi/m_j^\varphi \ (\forall m_i, m_j \in \mathfrak{M})$ とも書けます。

実は上の証明ではΦの條件(1),(2)を次の

(1)　$m_i \subset m_j e \quad \varphi \in \Phi \to m_i^\varphi \subset m_j e^\varphi$

及(2)の形でしか使って居ませんが(1)を満足するφの全体Δは群をなすとは限らず。多価群としては(1)を満足するφの全体ΦがΔの極大部分群になってゐる訳けです。

條件(4)は幾つかのより簡単な條件に分けられる可きものと思はれますが、今の処成果を持ち合はせませんので百様の御教示を得度く誌面をかりた譯けであります。

尚 cogroup が多価群Dであるかどうか、あると云ふEatonの予想は我はしいと

思はれますがこれも未解決の問題です。

多価群の $\mathfrak{M}$ の置換群 Σ に於ける上述の正則表現に於て $\mathfrak{M}$ の自己同型群 A は Σ の部分群ですが、$A \cap \mathfrak{G}$ は A の正規部分群で、それは e を固定する $\mathfrak{G}$ の元の全体 $\mathfrak{G}_1$ と一致します。$\mathfrak{M}$ の2元 a, b を $ae = be$ なる時に（Eaton に従って）e-共軛といへば、e-共軛なる元を一括して得られる類の全体は再び多価群 $\bar{\mathfrak{M}}$ を作りますが $\bar{\mathfrak{M}}$ の自己同型の中 A の元から導き起こされるものの全体が丁度 $A/\mathfrak{G}_1$ と同型です。$\mathfrak{G}$ の Σ に於ける正規化群を $N\mathfrak{G}$ とかけば、$\mathfrak{G}$ の自己同型 α から導き起こされる A の元 x の全体は即ち $A \cap N\mathfrak{G}$ で $a^\alpha = x^{-1} a x$.

Eaton は別の論文で多價群の行列による正則表現に触れて居りますが、其処で行列の係数は Boole 束、行列間の乗法は通常の定義に於ける $+, \cdot$ を $\cup, \cap$ で置き換へた形で定義されてゐる様です。Dresher-Ore では係数を整数にとって居りますが、あれでは彼等の意味の多価群を表現するのには具合が悪いのではないでせうか。尤も Wall の意味の多価群ならば差支へない訳です。Eaton の正則表現で係数として現れる Bool 束の元は 1 と 0 だけですが、2元束 B を基礎にとった行列は寧ろ多價写像の別名で、例へば多価群 $\mathfrak{M}$ の左正則表現の正規化群に含まれる正則元の全体が上記 $\mathfrak{G}$ なることを知ります。

引用文献

M. Krasner　Duke M. J. 6: 120–40 (1940)

J. E. Eaton　Duke M. J. 6, 101–7 (1940)

M. Krasner　C. R. Acad. Paris 218. 542–4 (1944) の Math. Rev. (1945) に於ける紹介 (D. C. Murdoch)

R. Baer. S. B Heidelberg Akad. (4) (1928)

J. E. Eaton. Amer. J. 62: 222–32 (1940)

M. Dresher and O. Ore, Amer J. 60 705–33. (1938)

H. S. Wall. Amer. J. 59. 77–98 (1937)

以上